

**Aula Complementar - Transferência de calor, massa e momento**

- difusão molecular
- convecção
- resistência à transferência de calor e momento em convecção forçada/laminar
- convecção livre
- combinação da convecção livre e forçada
- aplicações na natureza
- transporte do momento

**1 Transferência de calor, massa e momento**

A vida depende essencialmente de transferências de calor e massa entre os organismos e sua volta, devido às trocas de gás entre o ambiente e a pele, pelo, etc. Primeiramente discutiremos a difusão a nível molecular. É por este processo que calor (Q) e momento (M) são transportados no ar/água (em estômatos, solo, pulmão, etc.). A difusão molecular é também importante na convecção e transferência de massa entre superfícies e fluidos (flui sobre elas criando uma camada chamada de Camada Limite (CL) próxima à superfície onde ocorre o transporte por difusão. Depois dos processos de difusão discutidos, veremos o calor convectivo e a teoria de transferência de massa sobre discos, cilindros, etc em um fluido. Finalmente discutiremos as trocas de momento e a força do movimento fluindo em objetos neles.

**1.1 Transporte de calor e massa**

As equações abaixo descrevem o transporte de calor e massa. A densidade do fluxo de calor, H em W/m<sup>2</sup>, à superfície de um organismo é dada por:

$$H = \rho c_p \frac{T_s - T_a}{r_H} \quad (1)$$

onde  $\rho$  é a densidade do ar,  $c_p$  é o calor específico do ar,  $r_H$  é a resistência ao transporte de calor,  $T_s$  é a temperatura da superfície e  $T_a$  a temperatura do ar.

A densidade do fluxo de vapor,  $F_v$  em  $\text{g/m}^2\text{s}$  é descrita na equação 2, onde  $\rho_{vs}$  é a densidade de vapor na superfície,  $\rho_{va}$  é a densidade de vapor no ar e  $r_v$ , a resistência à troca de vapor a .

$$F_v = \frac{\rho_{vs} - \rho_{va}}{r_v} \quad (2)$$

Podemos então generalizar a densidade de fluxo de massa para utilizarmos com outras substâncias como o gás carbônico, oxigênio com a equação (3) (s indica superfície e a é do ar em volta).

$$F_j = \frac{\rho_{js} - \rho_{ja}}{r_j} \quad (3)$$

## 1.2 Difusão molecular

Descrição analítica de  $r$  pode ser facilmente obtida por condições onde o calor (Q) e o momento (M) são transportados por movimento ao acaso das moléculas. A chamada Lei de Fick para difusão em uma dimensão de um comprimento  $j$  em uma sistema (densidade de fluxo) é conhecida como (equação (4):

$$F_j(x) = -D_j \frac{d\rho_j}{dx} = - \frac{A_{(v)}}{A_{(s)}} D_j \frac{d\rho_j}{dx} \quad (4)$$

onde  $D_j$  é a difusibilidade do comprimento  $j$  e  $d\rho_j/dx$  é o gradiente de sua concentração.

Podemos assumir as equações 5, 6 e 7 abaixo, se a difusão for linearmente decrescente, onde  $l$  é a altura da camada limite,  $s$  o raio, se a superfície for esférica na equação (6), e se um cilindro temos a equação (7).

$$r_j = l \frac{D_j}{D_j} \quad (5)$$

$$r_j = s \frac{D_j}{D_j} (1 - S/l) \quad (6)$$

$$r_j = s \frac{D_j}{D_j} \ln(S/l) \quad (7)$$

$D_j$  é tabelada e dependente da temperatura  $T$  e da pressão  $P$  ( $D_j(T,P) = D(T/10)^n (\frac{100}{P})$ ).

As equações 5, 6 e 7 são usadas na difusão de  $O_2$  no solo para raízes e dentro de las. Para estômatos temos a equação 8 que é válida para água, gás carbônico e gás oxigênio, onde  $l$  é a profundidade do poro,  $d$  é o diâmetro,  $n$  é o número de poro por  $m^2$ :

$$r_{js} = \frac{4\left(1 + \frac{\pi d}{8}\right)}{\pi n d^2 D j} \quad (8)$$

### 1.3 Convecção

O fluido considerado movendo-se em um fluxo laminar sobre uma superfície infinitamente longa sem gradientes na densidade de fluxo, como no caso anterior. Agora veremos o transporte convectivo sobre um pequeno corpo (animal, folha) imerso no ar. As suposições anteriores (linearidade, etc) não são mais válidas, mas H, E e F, ainda se aplicam se  $r$  for apropriadamente definido. O trabalho aqui é relacionar  $r$  com as propriedades do fluido e da superfície.

Analiticamente é extremamente complicado. Aproximação empírica é mais razoável. Grupos adimensionais de variáveis tem sido feitas e estas correlacionadas

Exercício abelha e homem e elefante

$u = 1\text{m/s}$  ou  $u = 10\text{m/s}$

homem: 0, 3; elefante = 3 m

abelha: 0, 003

$\nu = 151 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$

empiricamente. Podemos calcular  $r$  com os grupos adimensionais apropriados ( ex. do braço). Uma vez isto feito, as relações apropriadas entre os grupos adimensionais para descrever seus processos de transporte podem ser obtidas diretamente da literatura e tabeladas. O nº de Reynolds  $Re$ , além de  $ud/\nu$ , indica também se o fluxo é laminar ou turbulento. Para valores grandes, o fluxo é considerado turbulento, e para valores pequenos, laminar. Se  $5 \times 10^5$  para a superfície plana em condições normais. Na atmosfera, na qual é turbulento,  $Re_{crit} \sim 10$  ou  $< 5 \times 10^4$ . apropriados ( ex. do braço).

### 1.4 Resistência ao transporte de calor e momento em convecção forçada laminar

Convecção forçada refere-se à condição na qual o fluido está movendo sobre uma superfície por uma forçante externa (a análise seria a mesma para uma superfície movendo através de um fluido estacionário, a exemplo de andar a pé com vento calmo). Convecção livre, por outro lado, refere-se ao movimento do fluido criado por um gradiente de pressão neste fluido (como a atmosfera).

A resistência à transferência de calor em uma convecção forçada é obtida pela combinação da equação 1 com o nº de Nusselt:

$$rH = \frac{d}{D_H Nu} \quad (9)$$

Necessita-se o valor de  $Nu$  através da equação 10 para obter o valor de  $rH$ , onde  $Pr = \nu/D_H$  com a difusividade térmica  $D_H$ .

$$Nu = 0,66Re^{1/2}Pr^{1/3} \quad (10)$$

Assim, temos a equação 11:

$$(11) \quad rH = \frac{1,5d}{D_H Re^{1/2} Pr^{1/3}}$$

Para o ar a 20°C,  $P=1000\text{hPa}$  ( $\sim 1000\text{mb}$ )  
 $D_H = 0,144\text{mm}^2/\text{s}$  e  $\nu = 1,01\text{mm}^2/\text{s}$  temos:

$$r_{Ha} = 307 \left( \frac{d}{u} \right)^{1/2} \quad (12)$$

com  $d$  dimensão característica em metros (m) e  $u$  velocidade do vento em m/s.

Esta equação (12) foi derivada somente para fluxo laminar sobre uma superfície plana. Isto fornece a resistência à transferência  $\bar{d}_e$  calor sobre uma face de um disco (não necessariamente redondo).

Correlações similares, com a equação 10, têm sido determinadas empiricamente, mas a gama de variações entre as considerações para diferentes estudos é grande. Esta equação parece ser uma boa média de todas as correlações de esferas e cilindros para o nº de  $Re$  normalmente encontrado na natureza. Nós, portanto, usaremos a equação (12) para discos, cilindros e esferas com  $d$  sendo o diâmetro de um cilindro (em fluxo transversal) ou esfera ou o comprimento (largura) do disco ou cilindro

em fluxo longitudinal, na determinação do fluxo. Para o vapor  $r_{va}$ , gás carbônico  $r_{ca}$  e oxigênio  $r_{oa}$  temos:

$$r_{va} = 283 \left( \frac{d}{u} \right)^{1/2} \quad (13)$$

$$r_{ca} = 395 \left( \frac{d}{u} \right)^{1/2} \quad (14)$$

*Figura 1: Velocidade do fluido de acordo com a distância da superfície*

$$(15) \quad r_{oa} = 319 \left( \frac{d}{u} \right)^{1/2}$$

Estas equações são também aproximações aplicadas para cilindros e esferas.

1- Ex. 2 pag. 68 (em classe)

2- pag. 76: Qual é o Re para um elefante a um vento de 10m/s?

3- Uma folha com máxima largura na direção do vento de 5 cm a 20°C e  $u=1\text{m/s}$  ( $T_a=15^\circ\text{C}$ ). Ache  $d$ , Re,  $r_{Ha}$  e H.

### 1.5 Convecção livre

Transporte por convecção livre ocorre quando um corpo a uma temperatura é colocado em um fluido mais frio ou mais quente. A transferência de calor entre um corpo e um fluido causa gradiente de pressão neste e este gradiente leva à mistura. Os processos são similares à convecção forçada exceto que, onde a velocidade do fluido aumentava com a distância da superfície na convecção forçada, na convecção livre primeiro aumenta e depois diminui. Ver figura 1.

Para a transferência de calor neste caso, observações são correlacionadas usando o grupo adimensional  $Nu$ ,  $Pr$  e  $Gr$ .

$$Nu = 0,54(GrPr)^{1/4} \quad (16)$$

Portanto para  $T=20^{\circ}\text{C}$ ,  $P=100\text{KPa}$  (1000mb) e Gr:

$$rH = 840\left(\frac{d}{T_s - T_a}\right)^{1/4} \quad (17)$$

Na convecção livre as resistências são 0,52, 1,34 e 1,05 para vapor, gás carbônico e gás oxigênio, respectivamente se a rH??

Quando o vapor é transportado, gradiente de pressão se desenvolve apenas com o aquecimento do ar, devido ao fato do ar úmido ser menos denso que o seco. A temperatura "virtual" é utilizada na equação 17 para melhorar *resultado*.  $T_v$  é a temperatura na qual o ar seco necessitaria estar para que sua densidade fosse a mesma do ar úmido.

A uma determinada densidade de vapor  $\rho_v$ :

$$T_v = T \left(1 + \frac{0,61\rho_v}{\rho}\right) \quad (18)$$

Então consideramos a correção para sistemas úmidos como (19):

$$T_{vs} - T_{va} = T_s - T_a + \frac{0,61(\rho_{vs}T_s + \rho_{va}T_a)}{\rho} \quad (19)$$

### 1.6 Combinação de convecção livre e forçada

Quase todos os processos de transferência de calor na natureza envolvem ambas convecção livre e forçada. Usualmente um ou outro processo domina. O critério normalmente usado para determinar qual processo é dominante é a razão  $Gr/Re^2$ . Se a razão for pequena, a convecção forçada domina; se for grande, o oposto ocorre. Se for próxima a 1 ambos os processos devem ser considerados.

Ache a razão  $Gr/Re^2$  para o exercício da folha (exercício 3 anterior)

Fórmulas

$$Gr = \frac{gd^3(T_s - T_a)}{v^2}$$

$$Re = \frac{ud}{v}$$

### 1.7 Aplicações na natureza

Aplicando as equações de transporte para situações reais, há questões a serem verificadas como:

- Que correção necessita ser aplicada nas equações de um disco plano para superfícies naturais nos cálculos da resistência?
- Qual é o efeito da turbulência na resistência?

A primeira questão pode ser resolvida se considerarmos o transporte de faixas finas individualmente da superfície e a média destas para conseguirmos o transporte total. O novo valor de  $d$  pode ser usado para conseguirmos o valor de  $r$ .

A figura a seguir (figura 2) mostra uma possível folha de comprimento total  $L$ . Para resolvermos o problema exposto na primeira questão, consideramos a largura  $d$  de um retângulo com comprimento  $L$  e com as propriedades de transporte desta folha. Na prática a largura "média" da folha é usualmente dada para  $d$ . Para muitas formas de folhas  $d$  pode ser considerado **0.7** da máxima dimensão foliar na direção do fluxo, com a área foliar correspondente a  $0,7 \times L \times d$ .

Refletindo agora sobre a questão levantada no segundo item temos que muitos estudos mostram que a resistência da camada limite em um fluxo turbulento é menor do que é medido em laboratório ou definido pela teoria. Isto é devido ao fato de que a turbulência no ar tende a reduzir a profundidade da camada limite próxima à superfície. Resistências, naqueles casos, são funções da intensidade da turbulência,

das dimensões características e do tamanho dos vórtices. Para valores típicos externos, a resistência é normalmente 70% do predito pela teoria.

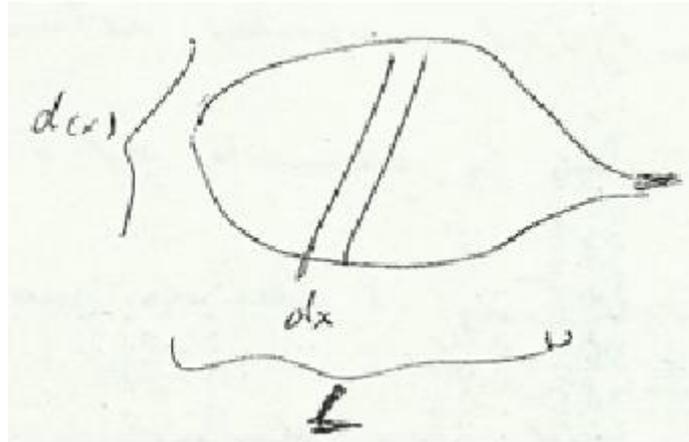


Figura 2: Diagrama da folha

### 1.8 Transporte de momento

Quando o fluido se move por uma superfície, exerce uma força friccionando sobre ele na direção do fluxo. A superfície exerce uma força igual e oposta retardando o fluido. A velocidade do fluido na superfície é zero e aumenta com a distância desta. Se um disco fino e chato é colocado em um fluido movendo-se nesta direção, este fluido flui suavemente sobre ele, a densidade de fluxo de momento para um lado sobre o disco é dado por (20) :

$$\tau_s = 0,664 \rho u^2 Re^{-1/2} \quad (20)$$

Esta densidade é chamada de fricção de superfície (pele por exemplo). O fluxo do momento poderia também ser expresso como uma força troca de momento, entre a corrente livre e a superfície, dividida por uma resistência (21):

$$\tau = \frac{\rho u}{r_m} \quad (21)$$

onde  $r_m = 1,5 \frac{Re^{1/2}}{u}$ . Para o ar a 20°C e 1000mb:

$$r_m = 388 \left( \frac{d}{u} \right)^{1/2} \quad (22)$$

O fluido movendo-se sobre um corpo exerce uma força sobre ele devido às mudanças de direção do fluxo em adição à falta de fricção (da superfície). Com  $Re$  (número de Reynolds) acima de 10, esta força é chamada de força de arraste, muito maior que a da superfície. Com  $Re > 100$ , as linhas de corrente exercem um arraste significativo.

Água corrente sobre um rio ou o vento sobre às árvores são exemplos deste tipo de força.

Seu entendimento permite calcular como tal força age sobre os seres vivos e como eles resistem a ela.

A força média sobre um corpo devido ao arraste por unidade de área perpendicular ao fluxo pode ser calculada como na equação (23):

$$\tau_f = \frac{\text{força}}{\text{área}} = C_d \rho u^2 \quad (23)$$

onde  $C_d$  é um coeficiente de arraste,  $\rho$  é a densidade do fluido e  $u$  a velocidade.

#### Tabela 1: dada em sala

Note que a equação (23) é similar a equação (20) com  $C_d = 0, 664Re^{-1/2}$ , mas lembrando-se que a equação (20) é a força sobre uma área longitudinal e não perpendicular como em (23). A Tabela a seguir nos fornece típicos coeficientes de arraste em diferentes formas para um gama de  $Re$  e mostra como a equação (23) é determinada.

Para os valores mais baixos de  $Re$  mostrados,  $C_d$  aumenta aproximando-se do valor predito em (20). Com  $Re$  mais altos do que os mostrados,  $C_d$  diminui abruptamente por causa do surgimento da turbulência.

Ache a força de arraste em um peixe, a energia requerida para este nadar com uma velocidade  $u = 1\text{m/s}$ , i.e., quanto tempo o peixe conseguirá manter o movimento com 1 kg de glicose.

Assumir:

- dimensão característica  $d = 5\text{ cm}$
- com propriedades de submarino (coeficiente de arraste)  $C_d = 0.035$

*Fórmulas*

$$\tau = C_d \rho u^2$$

$$\text{área perpendicular} = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi$$

$$\text{Força de arraste} = F_a = \tau F \cdot \text{área}$$

$$\text{Potência requerida} = P = F_a u$$

$$\rho_{H_2O} = 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$\begin{aligned} 1\text{kg de glicose} &= 15,7 \text{ MJ rendimento da glicose} \\ &= 30\% \end{aligned}$$