

MICROFÍSICA DA PRECIPITAÇÃO

Capítulo 4 – Crescimento de gotículas por difusão de vapor

Prof. OSWALDO MASSAMBANI, Ph.D.
Professor Titular

Departamento de Ciências Atmosféricas IAG-USP
massambani@usp.br
Maio - Junho de 2006

Conteúdo

- ❑ Objetivos
- ❑ Introdução à microestrutura de nuvens e da precipitação
- ❑ Equilíbrio de fases
 - Potencial químico do vapor de água no ar úmido
 - Calor latente da mudança de fase
 - A equação de Clausius-Clapeyron
 - A variação da energia livre de Gibbs no processo de nucleação homogênea
- ❑ Aerossol atmosférico
 - A variação da energia livre de Helmholtz no processo de nucleação heterogênea
 - O equilíbrio entre gotas de solução aquosa e o ar úmido
 - A nucleação por íons
- ❑ **O processo de difusão de vapor no crescimento e na evaporação de gotículas**
 - O crescimento de uma população de gotículas em nuvens quentes**
- ❑ A interação dinâmica entre as gotículas – O processo de colisão e coalescência
 - O crescimento de gotas na corrente ascendente
- ❑ A formação de gelo na atmosfera
 - O crescimento de cristais de gelo por difusão de vapor
 - O desenvolvimento da precipitação na fase gelo
- ❑ Composição química de hidrometeoros
- ❑ Microfísica da carga e da eletricidade atmosférica
- ❑ O sensoriamento remoto da precipitação
 - O espectro de tamanho de gotas
 - A taxa de precipitação e os parâmetros integrais e suas variabilidades

Bibliografia adicional

Basil J. Mason, *The Physics of Clouds*, 2nd Edition,
Clarendon Press, Oxford, 1971.

Cap. 4 - O processo de difusão de vapor no crescimento e na evaporação de gotículas

O crescimento de uma população de gotículas em nuvens quentes

A difusão de vapor de água

O processo de difusão de vapor sobre gotículas de nuvem podem promover seu crescimento através da condensação ou sua diminuição através da evaporação.

Esse processo é descrito pela equação de difusão de Fick, a qual estabelece que o fluxo de vapor de água atravessando uma superfície esférica ao redor da gotícula é dado por:

$$J = - D \nabla \rho$$

Onde D é o coeficiente de difusão ou difusividade de vapor de água e ρ é a densidade de vapor de água no espaço ao redor da gotícula.

O sinal negativo representa o fato de que a massa (moléculas de vapor) fluem na direção oposta à direção do gradiente da densidade de vapor.

Quando a molécula de vapor difunde sobre a gotícula, ela traz calor que aumenta a temperatura da gotícula. Esse aquecimento promove uma difusão de calor a partir da gotícula para o ar úmido ao seu redor.

Essa difusão de calor obedece a mesma forma da equação da difusão do vapor.

O fluxo de calor Q passando através da mesma superfície esférica ao redor da gotícula, é dado por:

$$Q = -K \nabla T$$

Onde K é o coeficiente de condutividade térmica do ar.

Quando o fluxo resultante de vapor de água ou de calor para dentro ou para fora de um volume infinitesimal é considerado, eles devem gerar uma mudança na densidade e na temperatura dentro daquele volume infinitesimal.

De modo que:

$$\partial\rho/\partial t = \nabla^2\rho$$

e

$$c\partial T/\partial t = K \nabla^2 T$$

Sob a condição estacionária ($\partial\rho/\partial t = 0$ and $\partial T/\partial t = 0$), os campos de densidade de vapor e de temperatura no espaço ao redor da gotícula, devem satisfazer as equações:

$$\nabla^2\rho = 0$$

and

$$\nabla^2 T = 0.$$

Em coordenadas esféricas e sob condições de simetria esférica, podemos escrever que o Laplaciano ∇^2 é:

$$(1/r^2)(\partial(r^2 \partial / \partial r) / \partial r) = 0$$

Onde r é a distância a partir do centro da gotícula.

Para uma gotícula de raio R , as condições de contorno são:

$$\rho = \rho_R \quad \text{e} \quad T = T_R \quad \text{para} \quad r=R$$

e

$$\rho \rightarrow \rho_e \quad \text{e} \quad T \rightarrow T_e \quad \text{quando} \quad r \rightarrow \infty$$

Onde ρ_e e T_e são respectivamente a densidade de vapor e a temperatura ambiente.

A solução para a equação de difusão no estado estacionário, se reduz integrando

$$\partial(r^2\partial\rho/\partial r)/\partial r = 0$$

Em relação a r para se obter

$$r^2\partial\rho/\partial r = C_1$$

Onde C_1 é uma constante. Dividindo-se por r^2 obtemos a equação $\partial\rho/\partial r = C_1/r^2$
E integrando-se com respeito a r obtemos: $\rho = -C_1/r + C_2$

As constantes de integração devem ser escolhidas para satisfazerem as condições de contorno.

$$\begin{aligned} \rho_e &= C_2 \\ e \\ \rho_R &= -C_1/R + C_2 \end{aligned}$$

Subtraindo-se a segunda equação da primeira, obtemos $(\rho_e - \rho_R) = C_1/R$
e assim $C_1 = R(\rho_e - \rho_R)$

A solução para a condição de contorno do problema para a equação de difusão estacionária, é então:

$$\rho(r) = \rho_e - (R/r)(\rho_e - \rho_R)$$

Esta equação reflete o fato de que se ρ_e é maior que ρ_R então ρ está decrescendo suavemente com r decrescendo em direção a R .

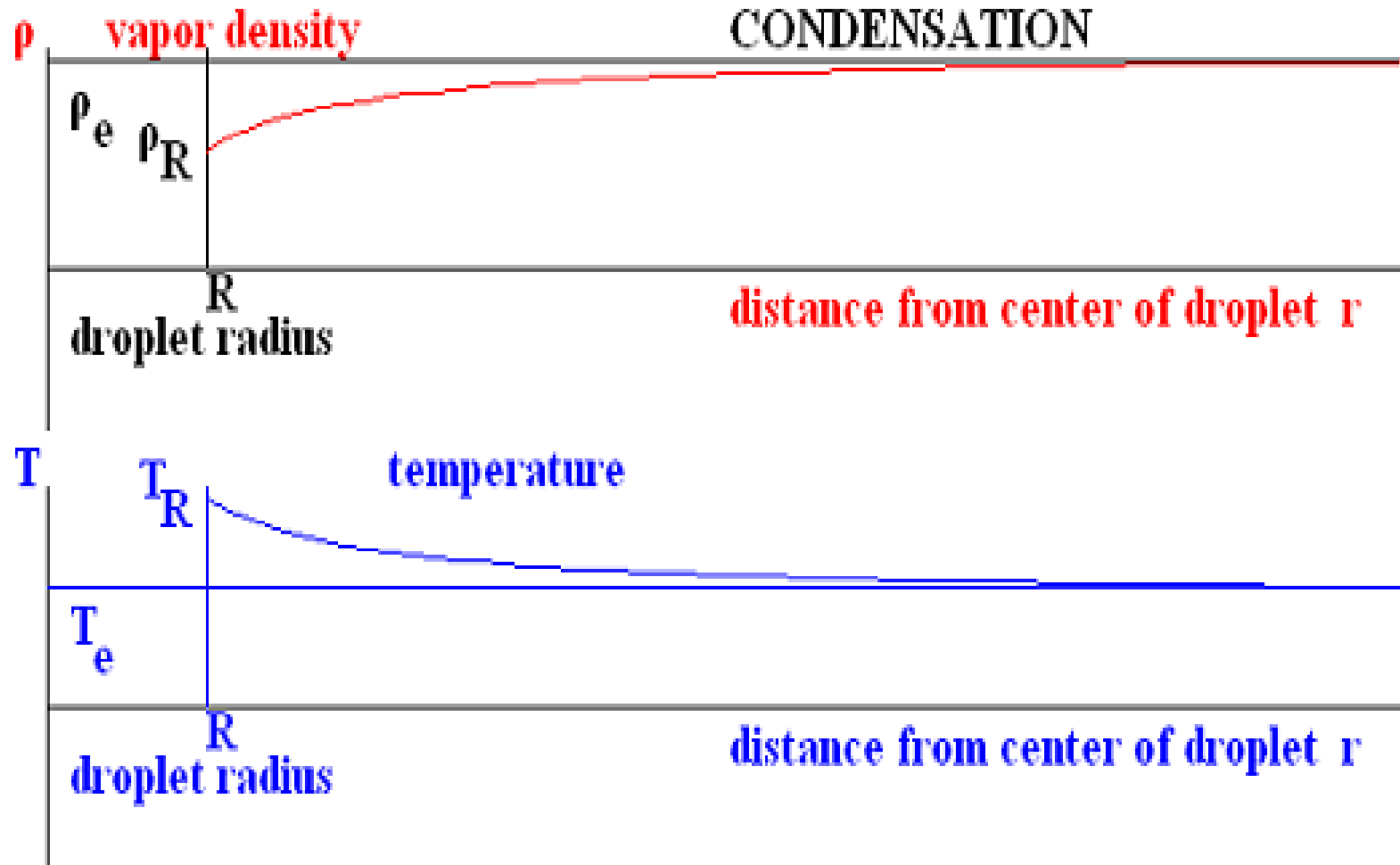
A temperatura obedece a mesma equação da densidade de vapor de água, de modo que:

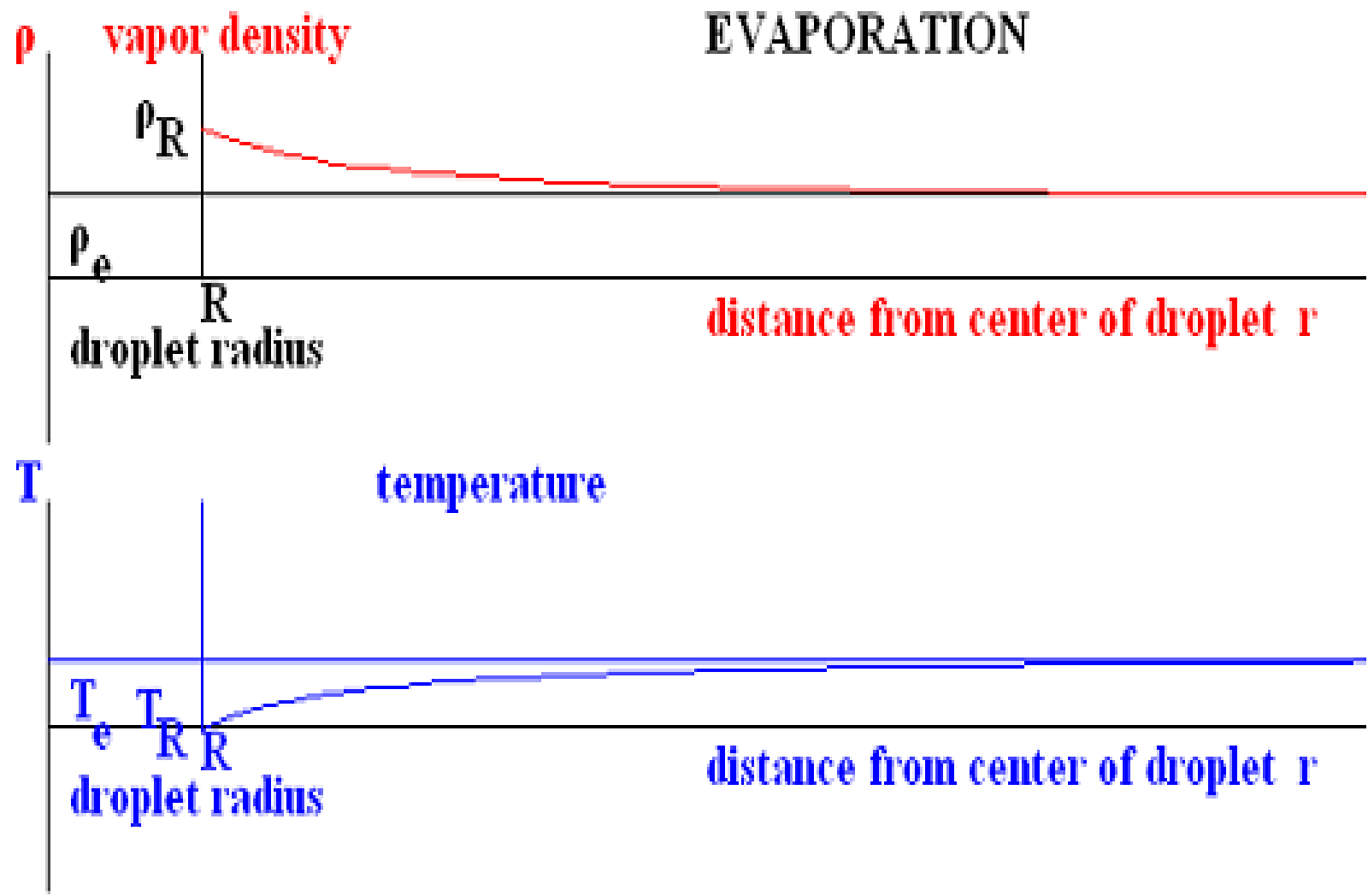
$$T(r) = T_e - (R/r)(T_e - T_R)$$

e que pode ser reescrita na forma:

$$T(r) = T_e + (R/r)(T_R - T_e)$$

Esta forma reflete o fato de que se T_R é maior que T_e então T aumenta suavemente com r decrescendo em direção a R .





Para a superfície da gota

$$(\partial\rho/\partial r)_{r=R} = ((\rho_e - \rho_R)/R^2)R = (\rho_e - \rho_R)/R$$

e

$$(\partial T/\partial r)_{r=R} = -((T_R - T_e)/R^2)R = -(T_R - T_e)/R$$

Portanto as quantidades líquida (net) da massa de vapor de água e do calor difundindo para dentro ou fora da superfície da gotícula são:

$$M = (4\pi R^2(-D)(-(\rho_e - \rho_R)))/R = 4\pi RD(\rho_e - \rho_R)$$

e

$$Q = (4\pi R^2(-K)(-(T_R - T_e)))/R = 4\pi RK(T_R - T_e)$$

O calor fornecido para a gotícula a partir da condensação de vapor sobre a gotícula é:

$$LM = 4\pi LD(\rho_e - \rho_R)R$$

Para o equilíbrio, este deve-se igualar ao calor Q difundido para fora da gotícula; ou seja,

$$LM = Q$$

$$4\pi LDR(\rho_e - \rho_R) = 4\pi KR(T_R - T_e)$$

e desse modo,

$$(T_R - T_e)/(\rho_R - \rho_e) = -LD/K$$

Esta equação deve ser resolvida para o valor desconhecido ρ_R em termos da temperatura desconhecida T_R como

$$\rho_R = \rho_e - (K/LD)(T_R - T_e)$$

A densidade de vapor de água na superfície da gotícula ρ_R , obedece também a lei ideal dos gases, de modo que:

$$\rho_R = e'_s(T_R)/R_V T_R$$

Onde R_V é a constante do gas para o vapor de água e $e'_s(T_R)$ é a pressão de vapor saturado para a temperatura T_R levando em conta o efeito Kelvin devido à curvatura da gotícula. Para a equação de Kelvin e o efeito Raoult e'_s é dado pela seguinte equação:

$$e'_s = e_s[1 + a/R - b/R^3]$$

Onde e_s é a pressão de vapor de água sobre uma superfície plana infinita.

Combinando as duas equações para ρ_R temos

$$(e_s/R_V T_R)[1 + a/R - b/R^3] = (\rho_e - (K/LD)(T_R - T_e))$$

Dividindo por $(e_s/R_V T_R)$ temos:

$$[1 + a/R - b/R^3] = (\rho_e - (K/LD)(T_R - T_e))R_V T_R / e_s(T_R)$$

O termo do lado direito dessa equação, é uma função de parâmetros conhecidos e de T_R ; o termo do lado esquerdo dessa equação é uma equação cúbica em $(1/R)$.

Assim, para um dado ρ_e e T_e a solução para R para qualquer valor de T_R pode ser determinado. Para o valor de T_R o valor de ρ_R pode ser determinado. Isto é, evidentemente, relações inversas de T_R e ρ_R como função de R que são desejadas mas são meras transformações matemáticas.

(Aproximação analítica da solução dessa equação, proposta por B.J. Mason)

Seja ρ_{VS} e e_s a densidade e pressão de vapor do vapor de água sob condições saturadas.

A equação de Clausius-Clapyeron é usualmente expressa na forma:

$$de_s/dT = L/(T(\alpha_{VS}-\alpha_L))$$

Onde L é o calor latente de fusão e os α 's referem-se às densidades específicas do vapor de água e da água líquida sob condição de saturação. Os volumes específicos são os valores recíprocos das densidades. Portanto a equação de Clausius-Clapyeron podem ser expressas como:

$$de_s/dT = L\rho_{VS}/(T(1-\rho_{VS}/\rho_L))$$

Como ρ_{VS} é desprezível em comparação com ρ_L a equação acima se reduz a:

$$de_s/dT = L\rho_{VS}/T$$

Mas, como o vapor de água satisfaz a lei dos gases ideais

$$e_s = \rho_{VS}R_V T$$

Então:

$$de_s/dT = (d\rho_{VS}/dT)R_V T + \rho_{VS}R_V$$

Igualando-se as duas expressões para e_s/dT e dividindo ambos os lados por $\rho_{VS}R_V T$ obtemos:

$$(1/\rho_{VS})(d\rho_{VS}/dT) = L/(R_V T^2 - 1/T)$$

ou, na forma diferencial

$$d\rho_{VS}/\rho_{VS} = (L/R_V)(dT/T^2) - dT/T$$

A integração desta equação diferencial entre T_e e T_R resulta

$$\begin{aligned} & \ln(\rho_{RS}/\rho_{eS}) \\ &= (L/R_V)[1/T_e - 1/T_R] - \ln(T_R/T_e) \end{aligned}$$

Neste ponto Mason faz uso da seguinte aproximação:

$$\text{Se } z \text{ é pequeno então } \ln(1+z)=z$$

Assim, se (y/x) é aproximadamente 1 então:

$$\ln(y/x) = \ln((x+(y-x))/x) = \ln(1+(y-x)/x) = (y-x)/x$$

Aplicando esta aproximação à equação anterior temos:

$$\begin{aligned} & (\rho_{RS} - \rho_{eS}) / \rho_{eS} \\ &= (L/R_V)(T_R - T_e) / (T_e T_R) - (T_R - T_e) / T_e \end{aligned}$$

Que após fatorar, resulta

$$(\rho_{RS} - \rho_{eS}) / \rho_{eS} = [(L/R_V T_R) - 1](T_R - T_e) / T_e$$

Desde $(T_R - T_e) = L(dm/dt) / (4\pi KR)$ a equação prévia pode ser expressa como:

$$(\rho_{RS} - \rho_{eS}) / \rho_{eS} = [(L/R_V T_R) - 1] L(dm/dt) / (4\pi KRT_e)$$

Com o estabelecimento prévio de que

$$\rho_e - \rho_R = (dm/dt) / (4\pi D)$$

Que dividindo por ρ_{eS}

Temos

$$(\rho_e - \rho_R) / \rho_{eS} = (dm/dt) / (4\pi D \rho_{eS})$$

As duas equações podem ser adicionadas. A adição do lado esquerdo resulta:

$$(\rho_e - \rho_R)/\rho_{eS} + (\rho_{RS} - \rho_{eS})/\rho_{eS}$$

$$(\rho_e - \rho_R + \rho_{RS} - \rho_{eS})/\rho_{eS}$$

Sob a hipótese que $\rho_R = \rho_{RS}$ podemos reduzir a:

$$(\rho_e - \rho_{eS})/\rho_{eS} = (\rho_e/\rho_{eS}) - 1 = S-1$$

Onde S é denominado de razão de saturação e (S-1) de razão de supersaturação .

O lado direito do resultado da soma daquelas equações resulta:

$$[(L/R_V T_R - 1)(L/(4\pi K R T_e)) + (1/(4\pi D R \rho_{eS}))](dm/dt)$$

Resolvendo para dm/dt temos:

$$dm/dt = (4\pi R(S-1))/[(L/R_V T_R - 1)(L/K T_e) + (1/(D \rho_{eS}))]$$

Como:

$$m = \rho_L (4/3)\pi R^3$$

E assim B

$$dm/dt = \rho_L 4\pi R^2 (dR/dt)$$

Segue daí que

$$R(dR/dt) = (S-1)/[(L/R_V T_R - 1)(L\rho_L/KT_e) + (\rho_L/(D\rho_{eS}))]$$

A densidade ρ_{eS} pode ser substituída por $e_{eS}/R_V T_e$ para obter a equação do crescimento:

$$\begin{aligned} R(dR/dt) &= (S-1)/[(L/R_V T_R - 1)(L\rho_L/KT_e) + (\rho_L RR(dR/dt))] \\ &= (S-1)/[(L/R_V T_R - 1)(L\rho_L/KT_e) + (\rho_L R_V T_e/(De_{eS}))] \end{aligned}$$

A modificação final é assumir que T_R seja T_e . Assim a versão final da equação do crescimento torna-se:

$$R(dR/dt) = (S-1) / [(L/R_V T_e - 1) (L\rho_L/KT_e) + (\rho_L R_V T_e/(De_{eS}))] = C$$

$$R(t) = \{R_0^2 + 2 C t\}^{1/2}$$

e a denominamos “EQUAÇÃO DO CRESCIMENTO PARABÓLICO”

Equação de Crescimento da Gotícula

$$r \, dr / dt = (S - 1) / [F_k + F_d]$$

S = razão de saturação do ambiente

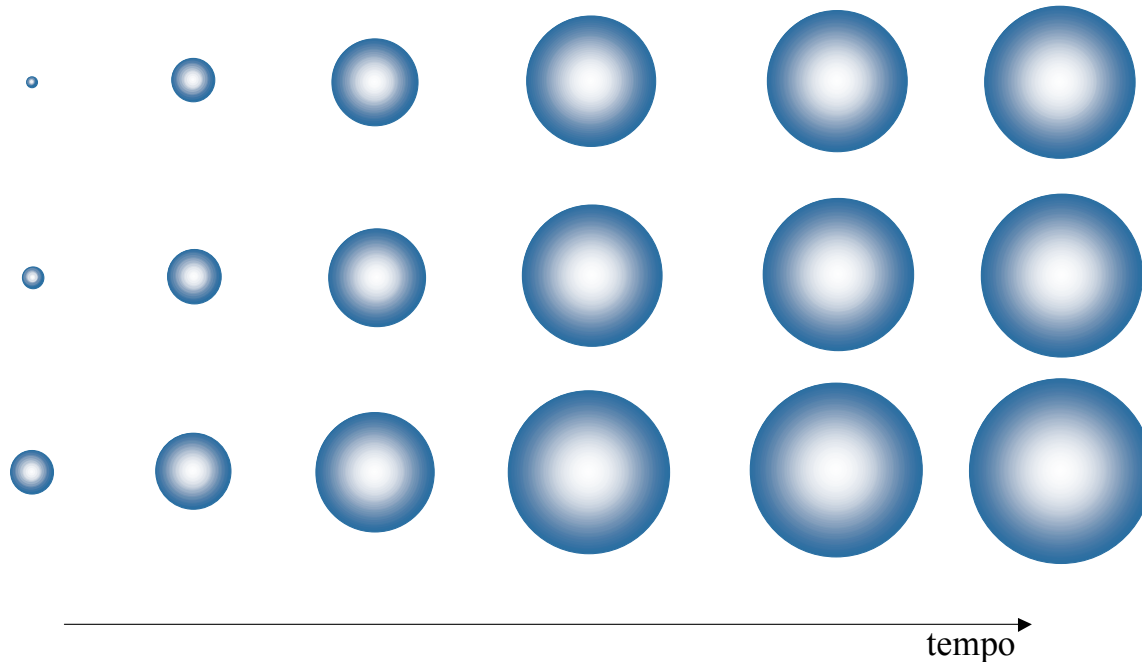
F_k = termo de condução de calor $\sim L^2 \rho_w / R_v K T^2$

F_d = termo de difusão de vapor = $\rho_w R_v T / D e_s$

D = difusão de vapor de água no ar

K = condutividade térmica do ar

Crescimento parabólico



Exercício 4.1:

Analisar e discutir os resultados apresentados na Fig. 7.1 e calcular a Tab. 7.3 do capítulo 7 do livro de R.R.Rogers & M.K.Yau

Crescimento de uma população de gotículas em nuvens quentes

Equações do crescimento

- Difusão de massa sobre a gotícula

$$r \frac{dr}{dt} = \frac{D}{\rho_w R_v T_\infty} (e_\infty - e_r) \quad (1a)$$

- Condução do calor latente para fora

$$r \frac{dr}{dt} = \frac{K}{L_v \rho_w} (T_r - T_\infty) \quad (2a)$$

- Efeitos combinados da curvatura e do soluto

$$\frac{e_r}{e_{sr}} = 1 + \frac{a}{r} - \frac{b}{r^3}$$

- Equação de Clausius-Clapeyron

$$\frac{e_{sr}}{e_{s\infty}} = \exp \left\{ \frac{L_v}{RT_\infty^2} (T_r - T_\infty) \right\}$$

Hipóteses

- Gotícula esférica de água de massa M , raio r de densidade ρ_w
- Gotícula está crescendo por difusão de vapor de água para sua superfície.
- A temperatura T_∞ e a densidade de vapor de água $\rho_{v\infty}$ do ambiente “remoto” permanece constante.
- O campo de difusão *steady state* é estabelecido ao redor da gotícula de modo que a massa de vapor de água difundindo através de uma superfície esférica de raio R centrada na gotícula será independente de R e do tempo t

Como fica a interação entre as gotículas?

Dimensões típicas:

$$r \approx 7 \mu\text{m}; \Delta x \approx 1000 \mu\text{m}; v_t \approx 0.5 \text{ cm sec}^{-1}$$

- A separação entre gotículas é tão grande, relativamente a seus tamanhos, que qualquer interação entre gotículas pode ser considerada desprezível (sem contar possíveis colisões).
- Cada gotícula em crescimento compartilha o mesmo ambiente. Isto significa que, gotículas influenciam uma a outra somente no efeito combinado sobre o ambiente comum.

Descrição qualitativa da condensação na corrente ascendente do ar

- Quando uma parcela de ar não saturado ascende e expande aproximadamente adiabaticamente, e a razão de saturação $S = (e_{\infty} / e_{s\infty})$ aumenta e os CCN carregados.
- Após alcançar o nível de saturação (NCL), a condensação começa a ocorrer sobre os maiores e mais ativos núcleos. A supersaturação é alcançada.
- S continua a aumentar e mais e mais núcleos são ativados e começam a crescer como gotículas. Entretanto, a taxa de aumento em S é mais lenta do que acima, por que o crescimento das gotículas rapidamente removem o excesso de vapor de água contido na parcela.
- Uma vez que as grandes gotículas removem o vapor de água mais rapidamente que as menores, o excesso de vapor é rapidamente removido do ar tão rapidamente quanto é fornecido a partir do suprimento causado pela expansão. Então S decresce em direção a 1.

EQUAÇÃO DE CRESCIMENTO DE UMA POPULAÇÃO DE NÚCLEOS

Visando calcular a taxa de mudança de S com o tempo, devemos considerar:

- A velocidade da corrente ascendente
- A condensação da população dos núcleos
- A equação de crescimento de cada núcleo

Então assumiremos:

1. A parcela de ar ascende com velocidade vertical constante U ;
2. Não há mistura com o ambiente;
3. Não há colisões entre gotículas.

Então temos:

$$S = \frac{e_{\infty}}{e_{s_{\infty}}}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{e_{s_{\infty}}} \frac{de_{\infty}}{dt} - \frac{e_{\infty}}{e_{s_{\infty}}^2} \frac{de_{s_{\infty}}}{dt}$$

mas

$$e_{\infty} = f_1(p, w)$$

$$e_{s_{\infty}} = g(T)$$

$$T = f_2(z, w)$$

$$\frac{de_{\infty}}{dt} = \left(\frac{\partial e_{\infty}}{\partial p} \right)_w \frac{dp}{dt} + \left(\frac{\partial e_{\infty}}{\partial w} \right)_p \frac{dw}{dt}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dz} \frac{dz}{dt} = U \frac{dp}{dz} = -\rho g U$$

ou

$$\frac{de_{\infty}}{dt} = \left(\frac{\partial e_{\infty}}{\partial p} \right)_w \left(\frac{dp}{dz} \right) U + \left(\frac{\partial e_{\infty}}{\partial w} \right)_p \frac{dw}{dt}$$

$$\frac{de_{s\infty}}{dt} = \left(\frac{de_{s\infty}}{dT} \right) \frac{dT}{dt} = \frac{L_v e_{s\infty}}{R_v T_\infty^2} \frac{dT}{dt}$$

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_w \frac{dz}{dt} + \left(\frac{\partial T}{\partial w} \right)_z \frac{dw}{dt}$$

ou

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_w U + \left(\frac{\partial T}{\partial w} \right)_z \frac{dw}{dt}$$

Isto é, se w muda, há condensação e T muda aproximadamente num processo adiabaticamente saturado.

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{e_{s\infty}} \left(\frac{\partial e_{\infty}}{\partial p} \right)_w \left(\frac{dp}{dz} \right)_U + \frac{1}{e_{s\infty}} \left(\frac{\partial e_{\infty}}{\partial w} \right)_p \frac{dw}{dt} - \frac{e_{\infty}}{e_{s\infty}^2} \left(\frac{L_v e_{s\infty}}{R_v T_{\infty}^2} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_w U - \frac{e_{\infty}}{e_{s\infty}^2} \left(\frac{L_v e_{s\infty}}{R_v T_{\infty}^2} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial w} \right)_z \frac{dw}{dt}$$

mas

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_w = -\frac{g}{C_p} \text{ and } \left(\frac{\partial e_{\infty}}{\partial p} \right)_w \left(\frac{dp}{dz} \right) = -\frac{e_{\infty} g}{RT_{\infty}}$$

como $w \approx \varepsilon \frac{e_{\infty}}{p}$, $dw = \frac{\varepsilon}{p} de_{\infty} - \frac{\varepsilon e_{\infty}}{p^2} dp = 0$

assim $\left(\frac{\partial e_{\infty}}{\partial p} \right)_w = \frac{e_{\infty}}{p}$; e $\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{pg}{RT_{\infty}}$

$$\frac{1}{e_{s\infty}} \left(\frac{\partial e_{\infty}}{\partial p} \right)_w \left(\frac{dp}{dz} \right)_U = - \left(\frac{e_{\infty}}{e_{s\infty}} \right) \left(\frac{g}{RT_{\infty}} \right)_U$$

$$- \frac{e_{\infty}}{e_{s\infty}^2} \left(\frac{L_v e_{s\infty}}{R_v T_{\infty}^2} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_w U = \left(\frac{e_{\infty}}{e_{s\infty}} \right) \left(\frac{L_v g}{R_v C_p T_{\infty}^2} \right)_U$$

$$\frac{1}{e_{s\infty}} \left(\frac{\partial e_{\infty}}{\partial w} \right)_p = \frac{p}{\epsilon e_{s\infty}} = \left(\frac{e_{\infty}}{e_{s\infty}} \right) \left(\frac{p}{\epsilon e_{\infty}} \right) = S \left(\frac{\rho_{\infty} R T_{\infty}}{\epsilon e_{\infty}} \right)$$

$$\frac{e_{\infty}}{e_{s\infty}^2} \left(\frac{L_v e_{s\infty}}{R_v T_{\infty}^2} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial w} \right)_z = S \left(\frac{\rho_{\infty} \epsilon L_v^2}{T_p C_p} \right)$$

Da 1a. Lei $-L_v dw = c_p dT - \alpha dp$

como $\alpha dp = g dz$, $\left(\frac{\partial T}{\partial w} \right)_z = \frac{L_v}{c_p}$

e

$$\frac{dw}{dt} = - \frac{d\chi}{dt} \left(i.e., \chi - \text{Conteúdo de água líquida} \right)$$

$$\frac{dS}{dt} = P - C, \text{ or}$$

P : Produção , C : Condensação

$$\frac{dS}{dt} = SQ_1 - SQ_2 \frac{d\chi}{dt}$$

$$Q_1 = \left(\frac{\varepsilon L_v g}{R_v C_p T_\infty^2} - \frac{g}{RT_\infty} \right)$$

$$Q_2 = \rho_\infty \left(\frac{\varepsilon L_v^2}{T_p C_p} + \frac{RT_\infty}{\varepsilon e_\infty} \right)$$

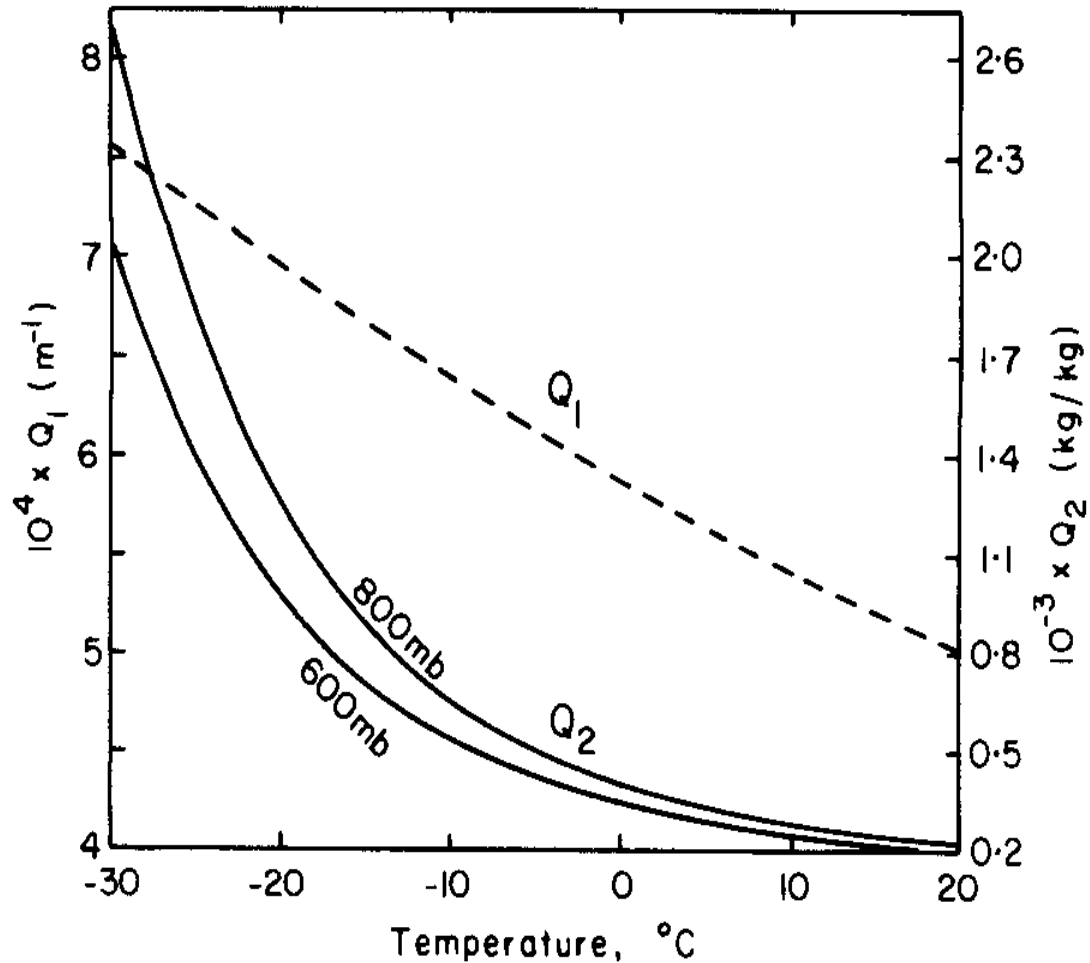


FIG. 7.2. The dependence of Q_1 and Q_2 on temperature. Q_2 depends also on pressure and is shown for 600 mb and 800 mb.

Equação para o Conteúdo de Água Líquida

$$\chi \equiv \frac{\text{(Massa de líquido H}_2\text{O por volume unitário (M}_\ell\text{))}}{\text{Densidade do ar}}$$

Mas

$$M_\ell = \rho_w \sum_i n_i \frac{4}{3} \pi r_i^3$$

Aqui n_i é o número de núcleos de condensação de tamanho i por unidade de volume, e r_i é o raio de uma gotícula formada sobre o i -ésimo núcleo.

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{M_\ell}{\rho_a} \right) \approx \frac{1}{\rho_a} \frac{dM_\ell}{dt}$$

assim

$$\frac{d\chi}{dt} \approx \frac{\rho_w}{\rho_a} \sum_i n_i 4\pi r_i^2 \frac{dr_i}{dt}$$

onde

$$r_i \frac{dr_i}{dt} = \frac{\left(S - \frac{e_{ri}}{e_{sr}} \right)}{\left(C_1 + C_2 \frac{e_{ri}}{e_{sr}} \right)}$$

$$\frac{dS}{dt} = SQ_1U - SQ_2 \frac{d\chi}{dt}$$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{g}{C_p}U + \frac{L_v}{C_p} \frac{d\chi}{dt}$$

$$\frac{d\chi}{dt} \approx \frac{\rho_w}{\rho_a} \sum_i n_i 4\pi r_i^2 \frac{dr_i}{dt}$$

$$r_i \frac{dr_i}{dt} = \frac{\left(S - \frac{e_{ri}}{e_{sr}} \right)}{\left(C_1 + C_2 \frac{e_{ri}}{e_{sr}} \right)}$$

$$\frac{e_{ri}}{e_{sr}} = 1 + \frac{a}{r_i} - \frac{b}{r_i^3}$$

Assim, a análise fornece um conjunto de equações simultâneas

Dadas as condições iniciais de T , p , w , U e n_i , desejamos resolver para:

S como uma função do tempo (altura dentro da nuvem)

r_i como uma função do tempo/altura

RESULTADOS DOS CÁLCULOS

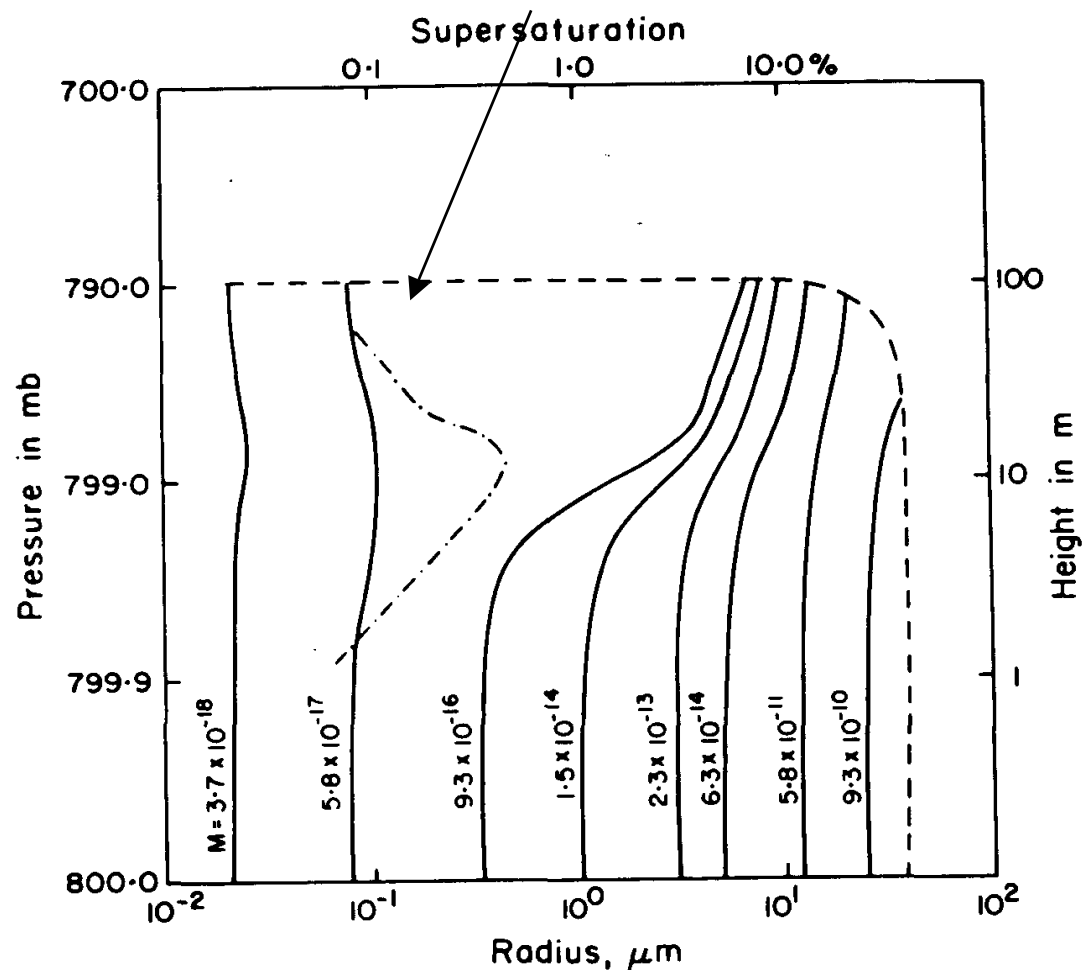


Fig. 7.3 do R.R.Rogers

Condições iniciais

$U = 15 \text{ cm s}^{-1}$

Concentração moderada de núcleos na base da nuvem

Resultados

- Todas as gotículas começam crescer ao longo da ascensão
- S^* alcança um max $\sim 10\text{m}$ acima da base da nuvem
- A distribuição de tamanhos é muito estreita

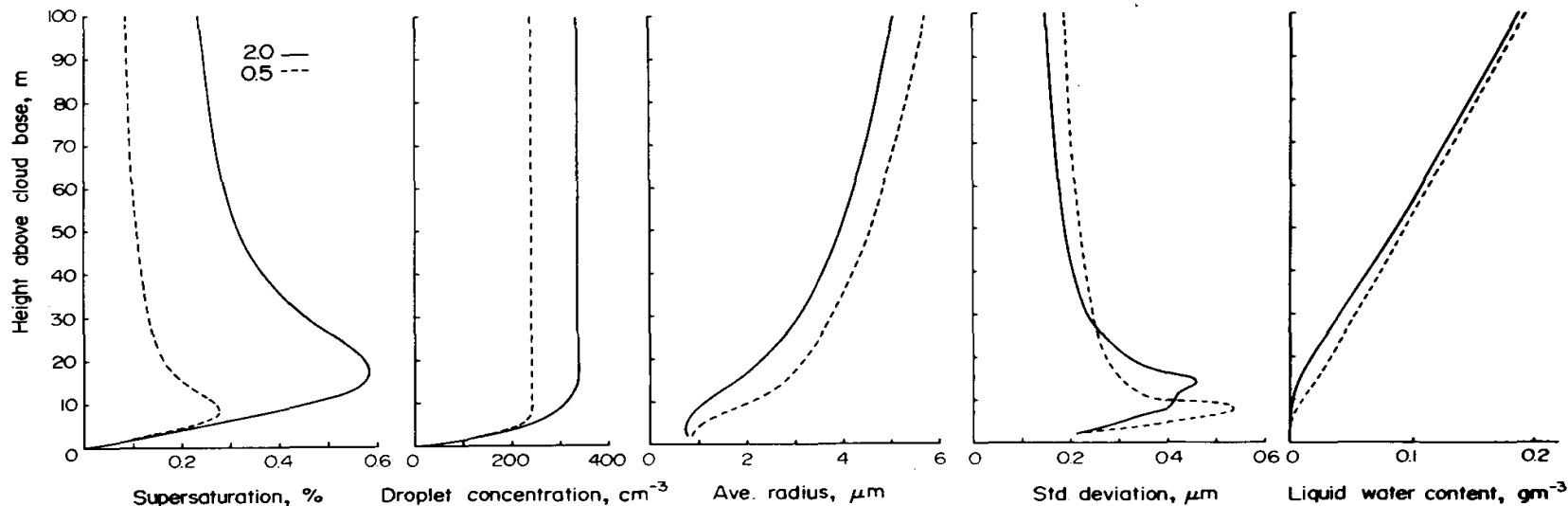


FIG. 7.4. Early development of cloud properties in air ascending at constant velocity of 0.5 m/s or 2 m/s.

R.R. Rogers

Condições iniciais

População de núcleos de NaCl nuclei com $N_c = 650 \cdot S^{0.7} \text{ cm}^{-3}$

$U = 2 \text{ m s}^{-1}$ (linha sólida) e 0.5 m s^{-1} (pontilhada)

Variações verticais do tamanho das gotículas de nuvem e da densidade de água líquida para nuvens estratiformes de baixos níveis, compilada a partir de um conjunto de medidas in-situ.

Note a tendência geral de aumento!

Fonte: Miles et al. (JAS, 2000 JAN)

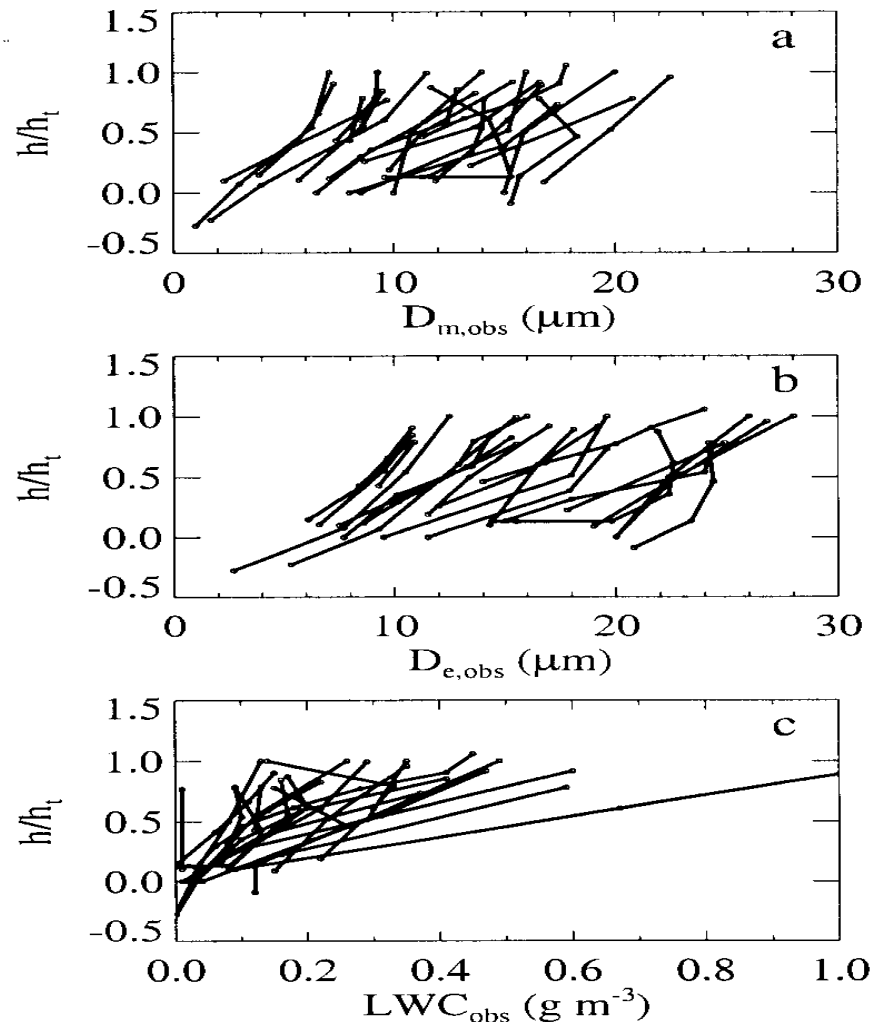


FIG. 2. Vertical profiles of (a) mean diameter, (b) effective diameter, and (c) liquid water content. For all the plots, data points within each cloud are connected. Here, h denotes height and h_t denotes cloud thickness; thus, h/h_t is normalized height within the cloud.

Variação vertical da concentração do número de gotículas.

Note a diferença entre nuvens marítimas e continentais.

Nuvens marítimas possuem menor # de gotículas, as quais não mudam muito com a altura. O oposto ocorre no caso das núvens continentais.

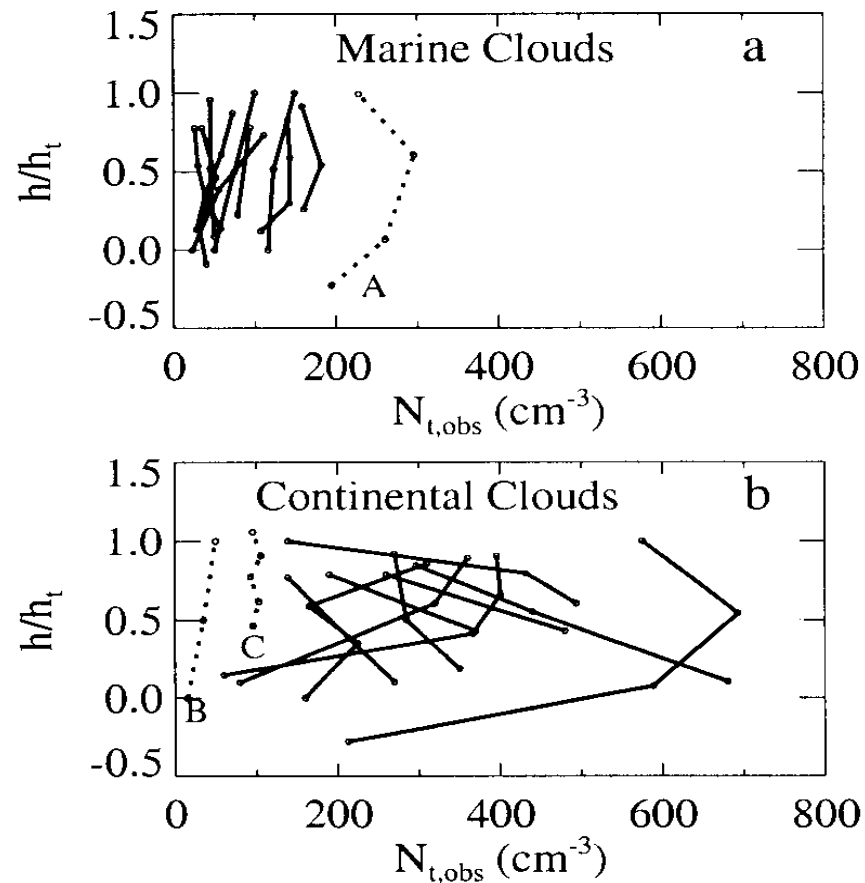


FIG. 3. Observed total number concentration $N_{t,obs}$ as a function of height within cloud for (a) marine clouds and (b) continental clouds. Data points within each cloud are connected. The dotted lines, labeled A, B, and C, denote misclassified clouds; h/h_t is normalized height within the cloud.

Miles et al. (JAS, 2000 JAN)

Resultados gerais

- Rápida ascensão e suave ajuste da supersaturação
- S^* alcança seu pico dentro de 100 m da base da nuvem. Assim a concentração de gotículas de nuvem é determinada nos níveis baixos na nuvem.
- O máximo de S^* aumenta com U como também o faz o número de núcleos ativados.
- Rápido aumento da concentração de gotículas até o ponto fixo alcançado no ponto de supersaturação máxima.
- Distribuição estreita de tamanho de gotículas.

Problemas com a Teoria do crescimento via Difusão

- Efeitos Cinéticos – As equações de transferência de calor massa e momento utilizadas são válidas somente para gotas muito maiores que a distância média moléculas do vapor de água no ar μ ($\sim 0.06\text{mm}$). Nesse caso, o campo do vapor de água e temperatura deve ser tomada como contínua de modo que a aproximação de Maxwell pode ser usada para determinar a transferência de água e calor.
- Quando os efeitos cinéticos são incluídos, o tamanho alcançado pela gotícula é menor para um determinado tempo do que o modelo. As correções cinéticas resultam em um espectro de tamanhos relativamente mais amplos.

Exercício 4.2:

Analisar e discutir sucintamente o conjunto de correções devido aos efeitos cinéticos, de ventilação, do crescimento não estacionário, na corrente ascendente variável no tempo e os efeitos estatísticos – p. 112 a 119 do R.R.Rogers e M. K. Yau

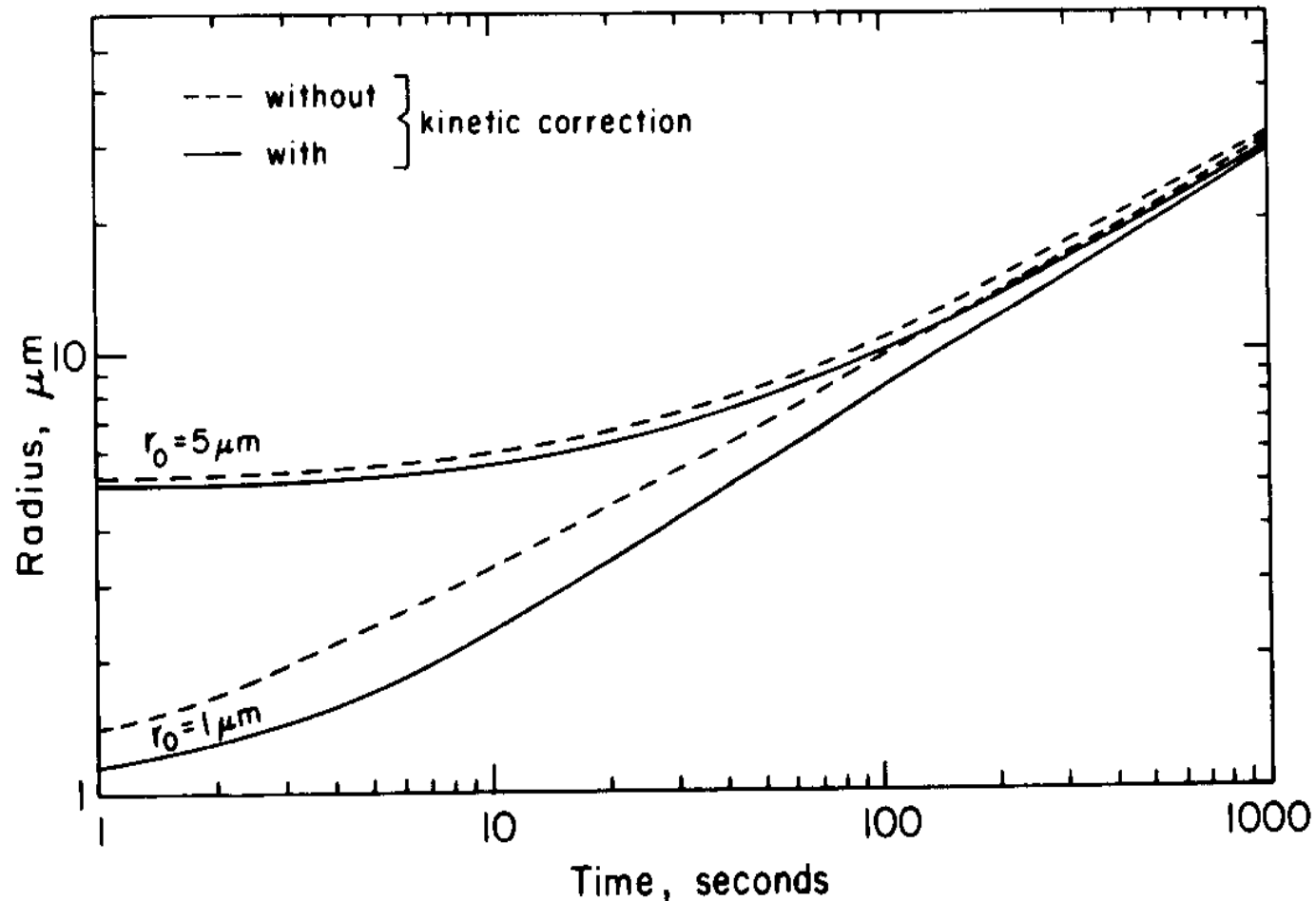
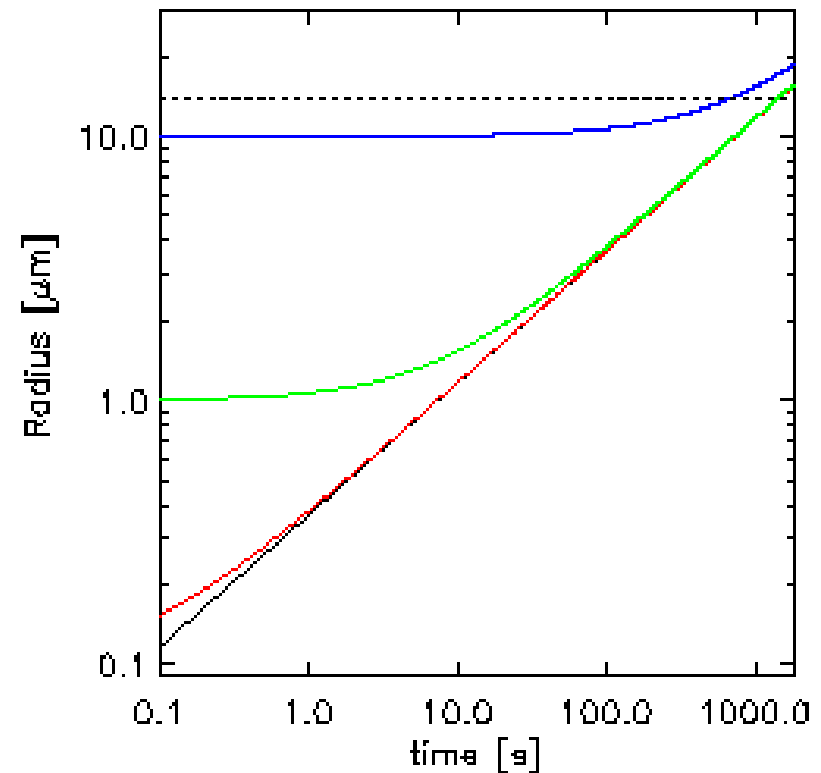
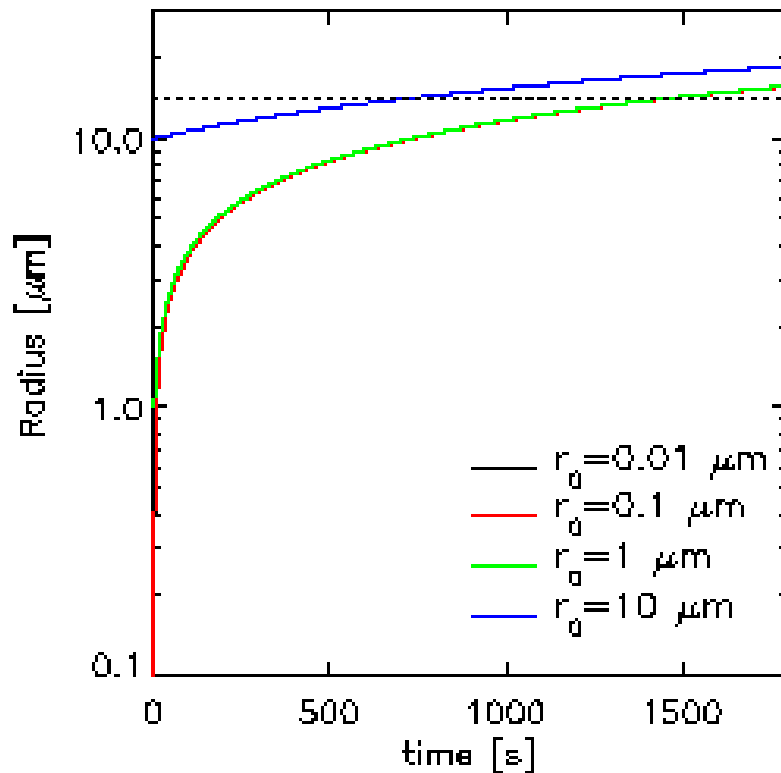


FIG. 7.6. Comparison of condensation growth with and without kinetic corrections. Two examples are shown, for initial radii of $1 \mu\text{m}$ and $5 \mu\text{m}$.

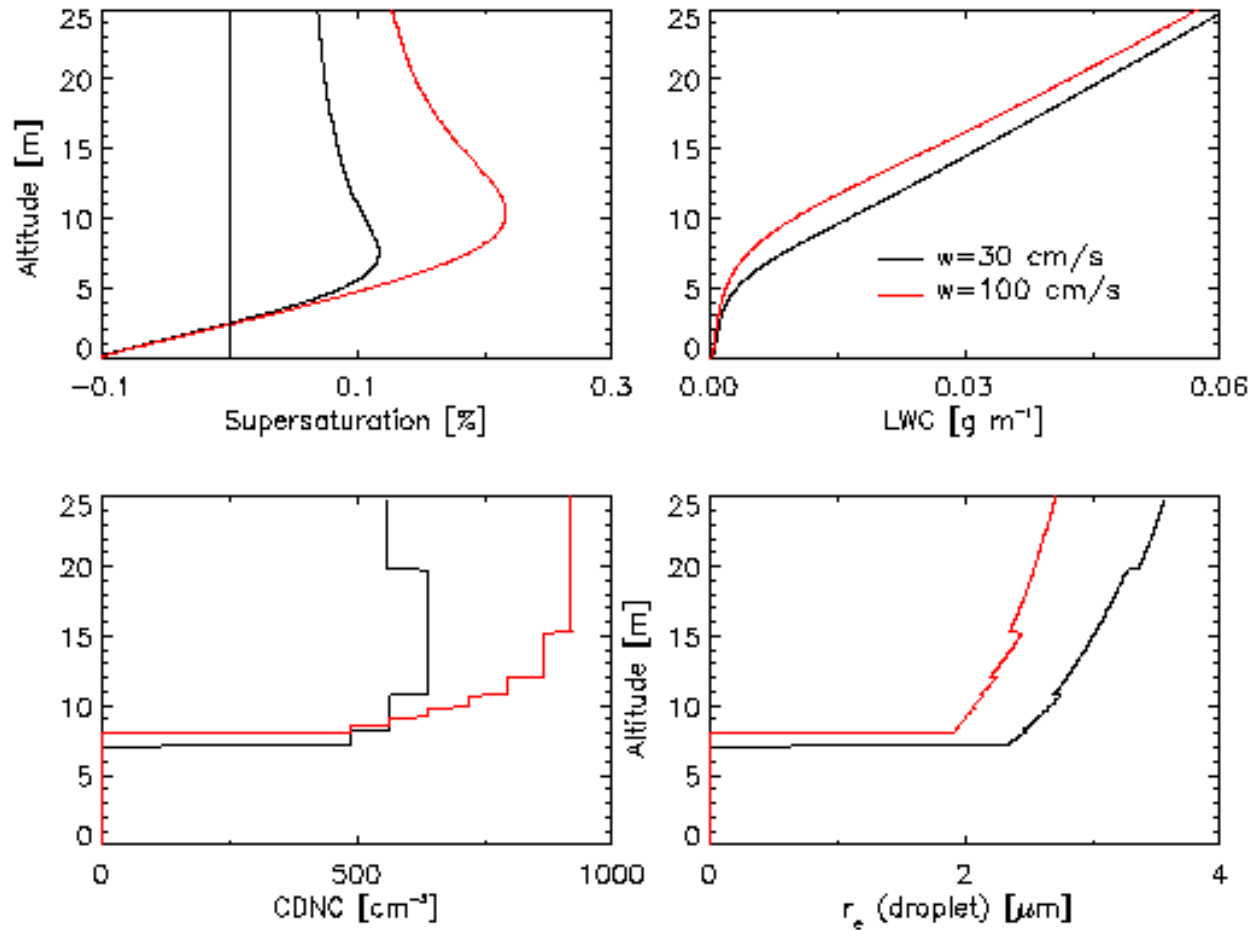
Exercício 4.3:

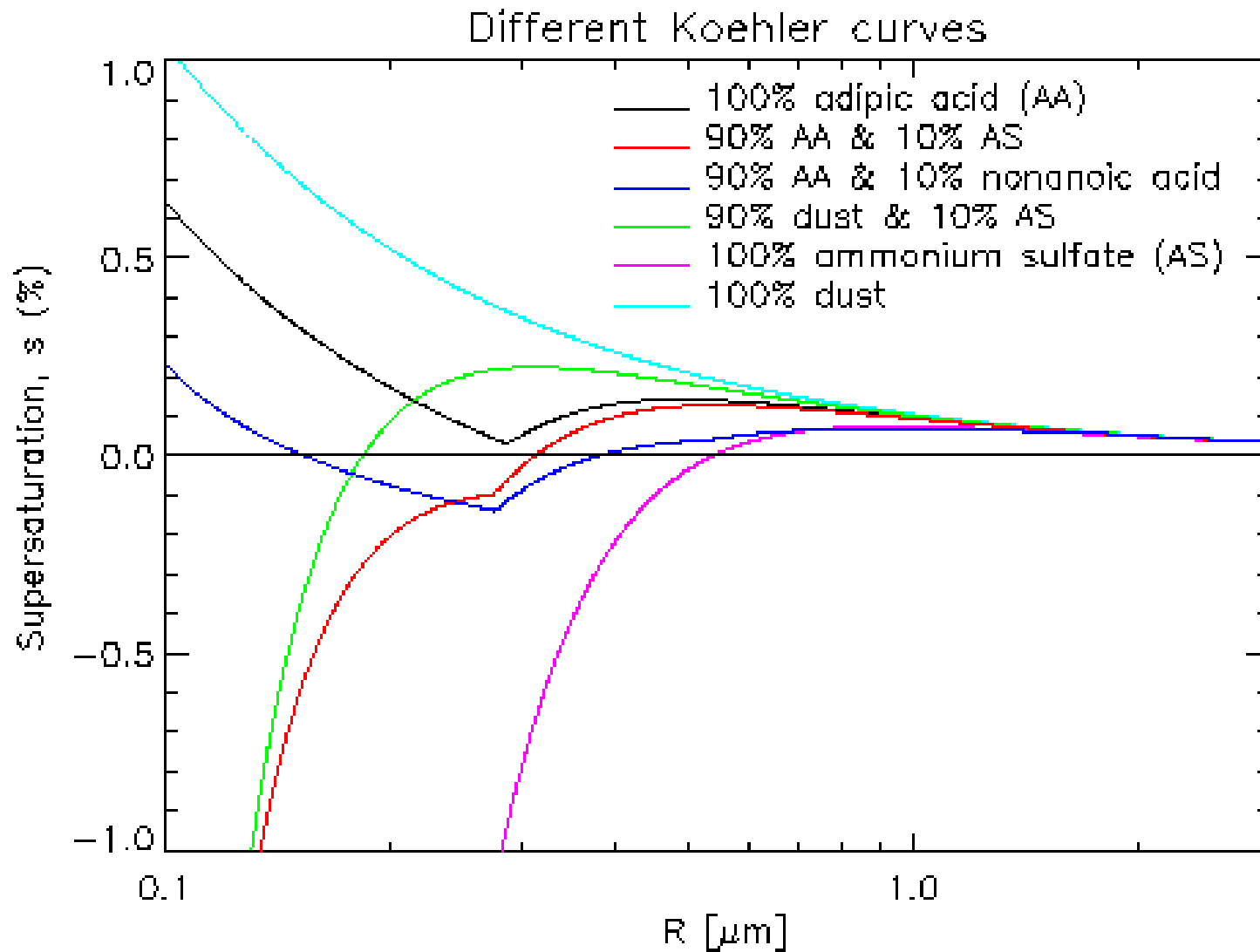
Analisar e discutir sucintamente os resultados apresentados nos slides seguintes:

Droplet growth equation for different r_0 at 0.1% supersaturations

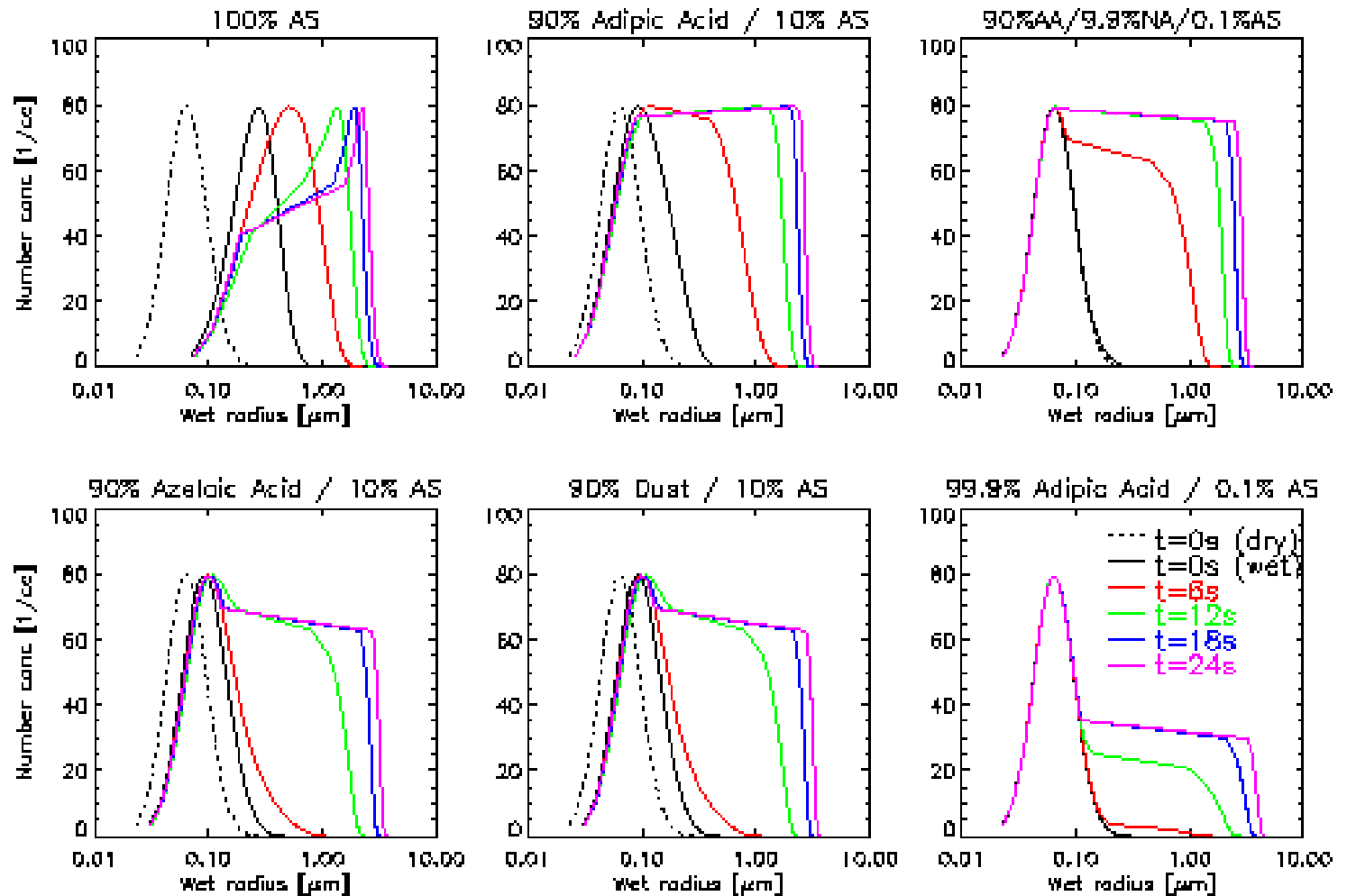


Sensibilidade do número de gotículas à velocidade vertical

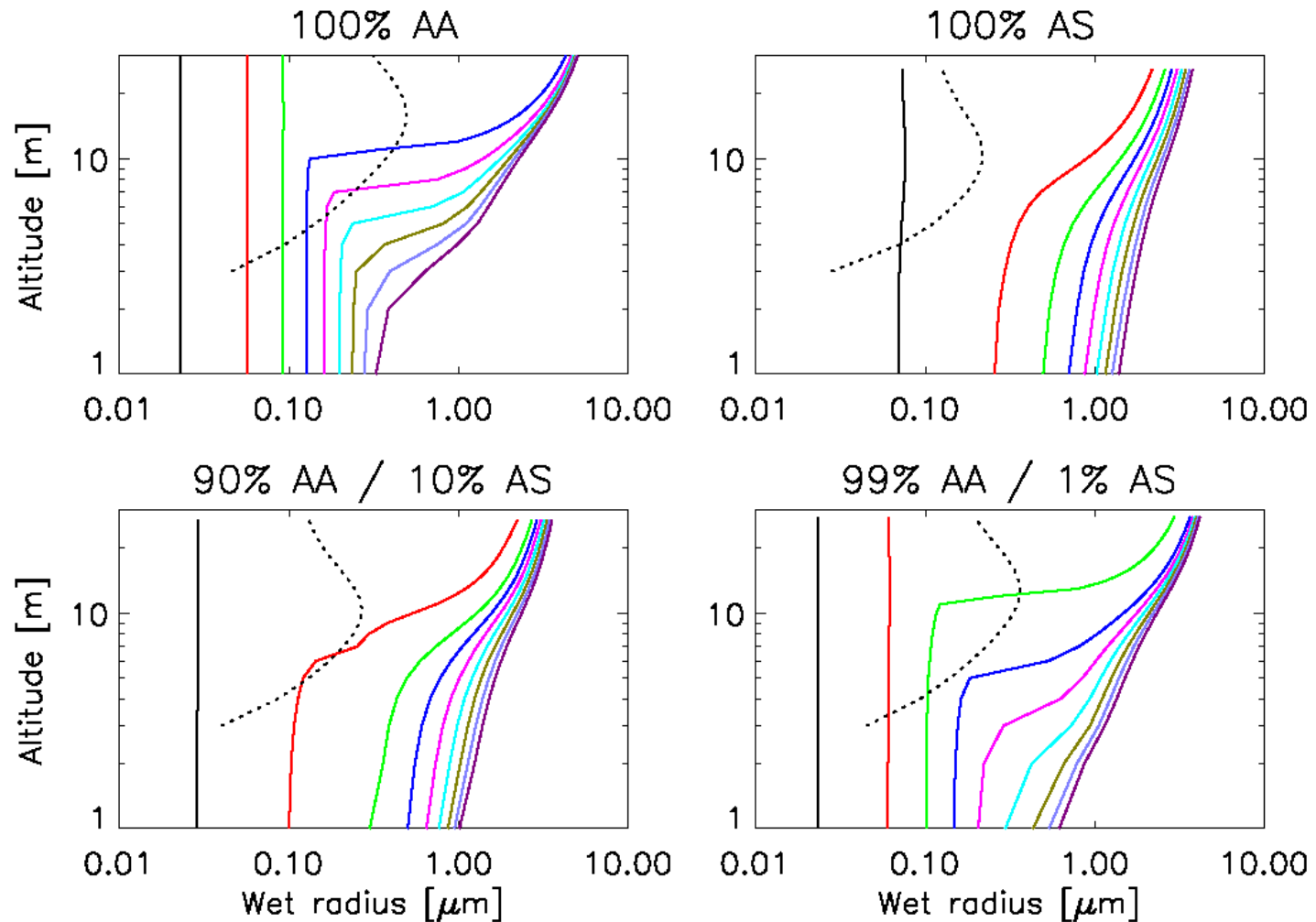




Evolução do espectro de partículas



Evolução do espectro de partículas e a supersaturação



Cloud development for different aerosols [$w=1$ m/s]

